

4.2:519.63

**ОБ ОДНОЙ ЯВНОЙ СХЕМЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ<sup>1)</sup>****С.П. КОПЫСОВ, И.М. КУЗЬМИН***Институт механики УрО РАН, г. Ижевск**E-mail s.kopysov@gmail.com; imkuzmin@gmail.com***EXPLICIT SCHEME FOR NONLINEAR STRUCTURAL DYNAMICS****S.P. KOPYSOV, I.M. KUZMIN***Institute of Mechanics UB RAS***Аннотация**

В статье рассматриваются постановка и решение задачи нелинейной динамики для аппроксимации которой в пространстве используется метод конечных элементов, а по времени — явные схемы. Анализируется схема, которая для линейных задач имеет безусловную устойчивость. Проведена оценка возможностей явной схемы с более мягким условием устойчивости на многомерной задаче нелинейной динамики.

**Ключевые слова:** Метод конечных элементов, нелинейная теория упругости, явные схемы пошагового интегрирования

**Summary**

In this paper, we consider nonlinear structural problems which solves by finite element method and explicit method. We proposed an one explicit method, which unconditional stability for linear elastic systems. The possibilities of explicit method is evaluated with the soft condition of stability on nonlinear structural problems.

**Key words:** Finite element method, nonlinear structural problems, explicit methods.

---

**Введение**

Для математических моделей сопряженных процессов FSI (Fluid Structure Interaction) интерес представляет динамический анализ переходных процессов, используемый для получения отклика системы на воздействие меняющееся во времени со стороны газа или жидкости.

Во многих задачах FSI реализуется кинематика деформирования с малыми деформациями, но повороты и перемещения допускаются произвольно большими. Этот вид деформаций характерен для тонкостенных конструкций. Для такого типа деформаций наиболее подходящей является общая лагранжева формулировка уравнений механики деформируемого твердого тела с использованием, в качестве мер деформаций, тензора деформаций Грина-Лагранжа  $E$ , а в качестве мер напряжений — второго тензора Пиолы-Кирхгофа  $S$  [1]. Общий лагранжев подход соответствует использованию начальной конфигурации в качестве отсчетной.

При решении задач нелинейной динамики в последние годы наблюдается возрождение интереса к явным разностным схемам, которые позволяют эффективно использовать вычислительные системы, содержащие большое число вычислительных узлов. Однако, обычно такие схемы накладывают жесткое ограничение на шаг по времени, связанное с требованием устойчивости, особенно при решении уравнений и систем параболического типа. В связи с этим разработка явных схем с более мягким условием устойчивости является перспективным направлением.

---

<sup>1)</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00055-а)

## 1. Постановка

Рассмотрим динамическую задачу деформирования для тела, занимающего область  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ , с границей  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , и находящегося под действием объемных сил  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , зависящих от времени  $t$ . В отсчётной лагранжевой формулировке уравнения движения в общем случае принимают вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \cdot (F \cdot S), \quad u(t_0) = u^0, \quad \dot{u}(t_0) = \dot{u}^0, \quad n \cdot (F \cdot S) = p, \quad (1)$$

где  $u$  — вектор перемещений,  $\rho$  — плотность,  $\nabla$  — оператор дивергенции в отсчётной конфигурации,  $S = F^{-1} \cdot \sigma \cdot F^{-T} \det F$  — симметричный тензор напряжений Пиола-Кирхгоффа, в котором  $\sigma$  — тензор напряжений Коши,  $p$  — вектор поверхностных сил,  $F$  — градиент деформации. Определяющие соотношения имеет вид  $S = \lambda(\text{tr } E)I + 2\mu E$ , где  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные, а  $E = 1/2(\nabla u + (\nabla u)^T + \nabla u \cdot (\nabla u)^T)$  — тензор деформаций Грина-Лагранжа.

Разбивая область  $\Omega$  на конечные элементы и проводя процедуру аппроксимации в соответствии с МКЭ, получаем конечно-элементную формулировку динамической задачи — систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$M^{t+\Delta t} \ddot{u} + C^{t+\Delta t} \dot{u} + K^{t+\Delta t} u = {}^{t+\Delta t} f, \quad (2)$$

где  $M$  — положительно определенная матрица масс,  $C$  — матрица демпфирования,  $K^{t+\Delta t} u = \int_{\Omega} {}^{t+\Delta t} B_L^T {}^{t+\Delta t} S d^0 V$  — вектор внутренних сил, здесь  ${}^0 V$  — объем в отсчётной конфигурации,  ${}^{t+\Delta t} u$  — вектор перемещений в момент времени  $t + \Delta t$ ,  ${}^{t+\Delta t} S = \{S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{13}\}$  — компоненты симметричного тензора напряжений Пиола-Кирхгоффа в момент времени  $t + \Delta t$ ,  ${}^{t+\Delta t} B_L = {}^0 B_{L_0}^T {}^{t+\Delta t} F^T$  — матрица, связывающая перемещения и деформации, где  ${}^0 B_{L_0}^T$  — матрица производных при  $t = 0$ .

## 2. Явная схема решения с мягким условием устойчивости

Численное решение матричных уравнений (2) выполним с использованием пошаговых процедур по времени. Для аппроксимации скорости и ускорения обычно применяются различные схемы пошагового интегрирования, наиболее популярные из них, неявные схемы, относятся к семейству схем Ньюмарка (метод трапеций, постоянных средних ускорений и др.), среди явных схем — центральная-разностная схема (CDM).

Конечно-разностная аппроксимация перемещений в схеме Ньюмарка- $\beta$  [1] записывается как

$${}^{t+\Delta t} u = {}^t u + {}^t \dot{u} \Delta t + (\Delta t)^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) {}^t \ddot{u} + {}^{t+\Delta t} \ddot{u} \beta \right], \quad (3)$$

ускорений

$${}^{t+\Delta t} \dot{u} = {}^t \dot{u} + \Delta t [(1 - \gamma) {}^t \ddot{u} + {}^{t+\Delta t} \ddot{u} \gamma]. \quad (4)$$

При  $\beta = 1/4$  и  $\gamma = 1/2$  схема неявная и безусловно устойчивая. В этом случае ускорение считается постоянным на интервале  $t \in [t, t + \Delta t]$ . При выборе значений параметров  $\beta = 1/6$  и  $\gamma = 1/2$  схема Ньюмарка- $\beta$  совпадает со схемой линейного ускорения. Если  $\beta = 1/4$  соответствует постоянному ускорению, а при  $\beta = 1/8$  ускорение в пределах временного полушага остается постоянным и изменяется один раз в середине шага. Для линейных динамических задач при  $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$  схема устойчива для любых шагов  $\Delta t$ . В более общем случае устойчивость схемы зависит от шага по времени и в этих случаях достигается устойчивость при  $\gamma < 1/2$ . При выборе параметра  $\gamma = 1/2$  схема имеет второй порядок точности и первый при всех других значениях  $\gamma$ . Если положить, что  $\beta = 0$  и  $\gamma = 1/2$  получаем явную схему. В отличие от CDM в явной схеме Ньюмарка не требуется специальных процедур запуска вычислений.

Явные схемы вычислительно эффективны в случае решения общих постановок динамического деформирования, где в общей реакции конструкции преобладают низкочастотные моды. Они позволяют достаточно быстро подключать новые определяющие соотношения и геометрическую нелинейность.

Один из вариантов явной схемы предложен Чангом в серии работ, например [2,3] и др. Свойства схемы аналогичны схеме с постоянным средним ускорением ( $\beta = 1/4$ ). Эта схема безусловно устойчива, не имеет диссипации, что продемонстрировано для одномерных линейных систем с постоянной жесткостью и на нескольких нелинейных задачах.

Особенностью данной модификации является то, что в уравнения для перемещений вводятся дополнительные операторы  $B_1$ ,  $B_2$ , определяемые с учетом начальной жесткости системы, шага интегрирования. Выбор значений переменных  $\beta$  и  $\gamma$ , входящих в эти операторы, позволяет изменять свойства рассматриваемой схемы. Результаты работы [3] позволяют говорить о том, что схема является безусловно устойчивой и не имеет диссипации, но только для линейных систем с постоянной жесткостью. В представленной работе исследуется устойчивость схемы при решении нелинейных задач в многомерном случае.

Решение нелинейных задач динамики в конечно-элементной постановке (2), на основе схемы Чанга, находится как

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + {}^t \dot{u} B_1 \Delta t + {}^t \ddot{u} B_2 \Delta t^2, \quad (5)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{u} = {}^t \dot{u} + \Delta t [(1-\gamma) {}^t \ddot{u} + \gamma {}^{t+\Delta t} \ddot{u}], \quad (6)$$

$${}^{t+\Delta t} \ddot{u} = M^{-1} ({}^{t+\Delta t} f - {}^{t+\Delta t} G). \quad (7)$$

где

$$B_1 = [I + \gamma \Delta t M^{-1} C_0 + \beta \Delta t^2 M^{-1} K_0]^{-1} [I + \gamma \Delta t M^{-1} C_0], \quad (8)$$

$$B_2 = [I + \gamma \Delta t M^{-1} C_0 + \beta \Delta t^2 M^{-1} K_0]^{-1} \left[ \frac{1}{2} I + \left( \beta - \frac{1}{2} \gamma \right) \Delta t M^{-1} C_0 \right].$$

Здесь  $K_0$ ,  $C_0$  — матрицы жесткости и демпфирования в начальный момент времени  $t = 0$ ,  $M$  — матрица масс,  $I$  — единичная матрица,  $\beta$ ,  $\gamma$  — параметры, позволяющие контролировать численные свойства семейства разностных схем. В дальнейших вычислениях полагалось, что матрица масса диагональная, а демпфирование в системе отсутствует ( $C_0 = 0$ ). Вектор внутренних сил  ${}^{t+\Delta t} G$  вычислялся исходя из определяющих соотношений, соответствующих вектору перемещений  ${}^{t+\Delta t} u$ . Таким образом, матрично-векторное произведение  $K {}^{t+\Delta t} u$  заменяется вычислением связи тензора напряжений и перемещений для нелинейных определяющих соотношений.

Данные схемы могут существенно сократить вычислительные затраты по сравнению с другими явными схемами, для которых размер временного шага выбирается из условия устойчивости, и неявными схемами для которых необходимо итерационное решение в случае нелинейных задач.

В [3] доказано, что свойства этого семейства схем такие же, как у неявной схемы Ньюмарка для линейно упругих сред. Это семейство также является безусловно устойчивым для линейных задач. Так для линейных задач это условие выполняется если параметры принимаются  $\beta \geq \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2$  при  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ ,

а в случае нелинейных задач  $\beta \geq \frac{{}^{t+\Delta t} \delta}{2} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2$  при  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ . Здесь  ${}^{t+\Delta t} \delta$  определяется как степе-

нь нелинейности, связанная с изменением жесткости системы  ${}^{t+\Delta t} \delta = {}^{t+\Delta t} K / K_0 = \left[ {}^{t+\Delta t} \omega^j / \omega_0^j \right]^2$ ,

где  $\omega_0^j$ ,  ${}^{t+\Delta t} \omega^j$  — собственные начальная и конечная  $j$ -мода колебаний. Для случая размягчения  ${}^{t+\Delta t} \delta$  выбирается как  $0 < {}^{t+\Delta t} \delta < 1$ , а при упрочнении —  ${}^{t+\Delta t} \delta > 2$ . Для рассматриваемого семейства схем выбор параметров  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta \geq \frac{1}{4}$  позволяет достигать второго порядка точности, наряду с возможной безусловной устойчивостью схемы в нелинейных задачах.

Наиболее трудоёмким этапом решения этой схемы является вычисление значения оператора  $B_1$ . Как видно из (7), оператор вычисляется обращением матрицы  $[I + \beta \Delta t^2 M^{-1} K_0]$ , что является затратной операцией, как по памяти, так и по времени. Рассматривалось два подхода для минимизации этих затрат.

Первый подход заключается в неявном обращении матрицы. В этом случае перемещения (5) вычисляются как  ${}^{t+\Delta t} u = {}^t u + {}^t \dot{u} x$ , где  $x$  — решение системы линейных алгебраических уравнений вида  $[I + \beta \Delta t^2 M^{-1} K_0] x = {}^t \dot{u} \Delta t + \frac{{}^t \ddot{u}}{2} \Delta t^2$ . Таким образом, заменяется вычисление обратной матрицы решением СЛАУ на каждом временном шаге. Такой подход вполне оправдывает себя, тем более на данный

момент существует множество эффективных численных алгоритмов решения систем уравнений, которые работают как на CPU, так и на GPU. В работе использовался параллельный метод сопряженных градиентов с диагональным предобуславливателем. Проведенные тесты показали, что такой подход эффективен, при числе временных шагов меньше  $10^4$ , в противном случае время обращения матрицы становится меньше, чем суммарные затраты, потраченное на решение систем. В рассматриваемых задачах число шагов по времени превышает это значение на несколько порядков.

Второй подход — непосредственное вычисление оператора  $B_1$  с обращением матрицы. Для минимизации затрат памяти использовался сжатый формат хранения матриц, что сократило расход памяти на несколько порядков. Исходя из того, что матрица  $[I + \beta \Delta t^2 M^{-1} K_0]$  не симметрична, обращение осуществлялось на основе  $LU$  — факторизации. С учетом особенностей реализации формата хранения данных, однократного вычисления матрицы  $B_1$ , построен алгоритм существенно сокращающий вычислительные затраты по сравнению с предыдущим подходом.

Использование естественного параллелизма присущего поэлементным схемам решения конечно-элементных систем уравнений [4] и технологии OpenMP позволило распараллелить алгоритм решения. Такие поэлементные операции как формирование вектора нагрузок  ${}^t f$ , вектора внутренних напряжений  ${}^t G$ , вычисление градиента деформации и т.д. выполнялись параллельно в несколько потоков. Вычисления перемещений (5), скоростей (6) и ускорений (8) также распараллеливается с помощью OpenMP.

### 3. Численные эксперименты.

Рассмотрим задачу о колебаниях защемленной круговой пластины под действием давления [5]. Граничные условия — жесткое закрепление по торцу пластины, на одной свободной поверхности задавалось давление  $p = 0.17$  ГПа, на другой  $p = 0$ . Давление приложено мгновенно и постоянно по времени. Толщина пластины  $H = 0.015$  м, радиус  $R = 0.1485$  м. Свойства материала:  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 210$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ . Однородная конечно-элементная сетка состоит из 22095 тетраэдральных ячеек с линейной аппроксимацией перемещений.

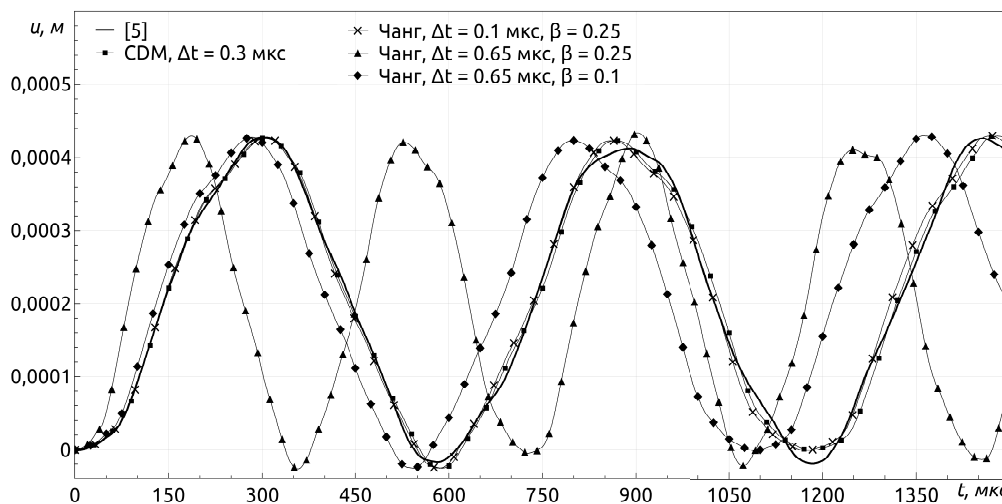


Рис. 1: Зависимость перемещений от времени при решении задачи в линейной постановке

Оценка решения получаемого на основе схемы (5)–(8) рассматривалась на ряде задач. Результаты сравнивались с явной центрально-разностной схемой, для которой условие устойчивости имеет вид  $\Delta t^* \leq l_e/c$ , здесь  $c$  — скорость распространения волны в конструкции, которая вычисляется по формуле  $c = \sqrt{[E(1-\nu)]/[\rho(1+\nu)(1-2\nu)]}$ ,  $l_e$  — длина наименьшего ребра ячейки сетки или  $l_e = \min\{[3V_e]/[A_e]\}$ , где  $V_e$  — объем ячейки сетки, а  $A_e$  — наибольшая из площадей граней ячейки. Условие устойчивости для

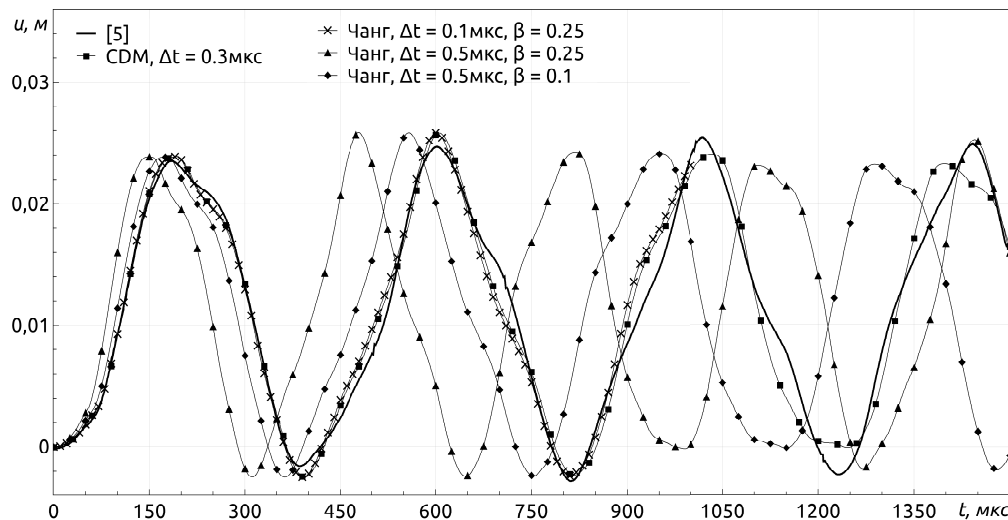


Рис. 2: Зависимость перемещений от времени при решении задачи в геометрически нелинейной постановке

исследуемой сеточной задачи соответствовало шагу  $\Delta t^* = 0.43$  мкс.

На рис. 1 приведены графики перемещений получаемых с помощью явной схемы и схемы Чанга при решении геометрически линейной постановки задачи. Здесь же приведены результаты по схеме из [5]. В тестовых расчетах, достигаемый шаг с которым схема центральных разностей оставалась работоспособной равнялся  $\Delta t = 0.3$  мкс, что несколько ниже критического. Для схемы Чанга характерно, что с увеличением шага больше  $\Delta t^*$  период колебаний уменьшается, а амплитуда соответствует результатам полученным по схеме CDM.

На рис. 2 представлены результаты решения задачи с учетом геометрической нелинейности. Отметим, что схема также остается устойчивой при некоторых параметрах  $\beta$  и  $\Delta t > \Delta t^*$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Bathe K.J.** Finite Element Procedures. — New Jersey, Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996. — 1037 с.
2. **Chang S.Y.** An explicit method with improved stability property // Int. J. Numer. Meth. Engng. — 2009. — V. 77. — P. 1100–1120.
3. **Chang S.Y.** A new family of explicit methods for linear structural dynamics // Computers and Structures. — 2010. — P. 755–772.
4. **Копысов С.П., Кузьмин И.М., Недожогин Н.С., Новиков А.К., Рычков В.Н., Сагдеева Ю.А., Тонков Л.Е.** Параллельная реализация конечно-элементных алгоритмов на графических ускорителях в программном комплексе FESstudio // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 79–97.
5. **Чекмарев Д.Т., Жидков А.В.** Численное решение трехмерных динамических задач теории упругости на основе ажурной схемы МКЭ. — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2010. — 53 с.

## REFERENCES

1. **Bathe K.J.** Finite Element Procedures. — New Jersey, Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996. — 1037 p.

2. **Chang S.Y.** An explicit method with improved stability property // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* — 2009. — V. 77. — P. 1100–1120.
3. **Chang S.Y.** A new family of explicit methods for linear structural dynamics // *Computers and Structures.* — 2010. — P. 755–772.
4. **Kopysov S.P., Kuzmin I.M., Nedozhogin N.S., Novikov A.K., Rychkov V.N., Sagdeeva Y.A., Tonkov L.E.** Parallel implementation of a finite-element algorithms on a graphics accelerator in the software package FEStudio [Parallel'naya realizaciya konechno-elementnyh algoritmov na graficheskikh uskoritelyah v programmnom komplekse FEStudio] // *Komp'uternye issledovaniya i modelirovanie.* — 2014. — V. 6, № 1. — P. 79–97. (in Russian)
5. **Chekmarev D.T., Zhidkov A.V.** Numerical solution of three-dimensional dynamic elasticity problems based on an openwork FEM [Chislennoe reshenie trehmernih zadach teorii uprugosti na osnove azhurnoi shemy MKE]. — N.Novgorod: Izd-vo NNGU, 2010. — 53 p. (in Russian)